Braunschweigische
Wissenschaftliche Gesellschaft

Jahrbuch 2018

Sonderdruck
Seiten 120–122

J. Cramer Verlag · Braunschweig
2019

https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201905071459-0

1+2+3+4+… = –1/12: Fake News – oder was ist dran? Gedanken zu einer Kontroverse

Rainer Löwen

Institut für Analysis und Algebra, TU Braunschweig, Universitätsplatz 2,
DE-38106 Braunschweig, E-Mail:r.loewen@tu-bs.de

Vor einigen Jahren meldete die Presse, einige Physiker hätten nun endlich die wahre Summe der unendlichen Reihe 1+2+3+4+… gefunden, und der Wert sei nicht unendlich, wie alle dachten, sondern –1/12. Unter anderem könnte diese Meldung ausgelöst worden sein durch einen populären Beitrag von A. Padilla und E. Copeland aus Nottingham auf dem Internetportal *Numberphile* (https://www.youtube.com/watch?v=w-I6XTVZXww, momentan 6,5 Millionen Aufrufe). Der physikalische Hintergrund dazu ist unter anderem eine Situation, die bei dem Casimir-Effekt in der Stringtheorie auftritt, wobei eine Kraft sich aus unendlich vielen gleichgroßen, positiven Beiträgen zusammensetzt. Messungen scheinen tatsächlich die Aussage zu stützen, dass die kombinierte Kraft den negativen Wert –1/12 (mal den Einzelbeitrag) hat. Hieraus ergibt sich die Herausforderung, dieses seltsame Verhalten einer unendlichen Reihe entweder mathematisch zu erklären, oder einen physikalischen Grund anzugeben, der den Widerspruch auflöst.

In dem Internet-Beitrag werden zu diesem Zweck, in der Absicht, allgemeinverständlich zu sein, divergente Reihen in einer Weise manipuliert (z.B. subtrahiert), die in der Mathematik mit Recht als unzulässig eingestuft wird, weil man mit derartigen Manipulationen leicht jedes beliebige Ergebnis begründen könnte. Es gab dazu entsprechend viel Widerspruch, unter anderem von *Mathologers* (Burkard Polster und Marty Ross in Melbourne, https://www.youtube.com/watch?v=YuIIjLr6vUA, zur Zeit 0,7 Millionen Aufrufe). In einer nachgereichten Erklärung bei Padilla und Copeland wird dann erläutert, dass die genannten Manipulationen sich durch einen Zusammenhang mit der Riemannschen Zeta-Funktion rechtfertigen ließen. Diese für die Zahlentheorie fundamentale Funktion ist durch eine unendliche Reihe definiert, deren Glieder von einer komplexen Zahl z mit Realteil >1 abhängen. Setzt man unerlaubterweise für z den Wert –1 ein, so

* Der Vortrag wurde am 13.04.2018 in der Klasse für Mathematik und Naturwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gehalten.

https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201905071459-0

erhält man die Reihe 1+2+3+4+ … der natürlichen Zahlen. Andererseits kann man die Zeta-Funktion durch ein Standard-Verfahren (die analytische Fortsetzung) auf genau eine Weise für alle Werte von z ergänzen, auch für z = –1, und man erhält dann dort den Wert –1/12. Diesen Sachverhalt so zu interpretieren, als hätte man nun die Reihe 1+2+3+4+… ausgewertet, ist ebenso gewagt wie die oben erwähnten unzulässigen Operationen und mit der gleichen Willkür behaftet.

Eine interessante Aussage findet man in einer der nachgereichten Erklärungen von Padilla; er schreibt da:

> “As a physicist I understand that sum to mean something like the sum of all the harmonics of the fundamental string, not just a large number of them. Nature doesn’t offer you that choice. Staying in that context, when we write 1+2+3+.... we mean the contributions from all of the harmonics, and not the limit as N goes to infinity of the first N harmonics. So when we say it equals something, we mean „what is the value we should assign to the sum of all those harmonics“.”

Das ist eine bizarre Argumentation. Sie tut nichts weniger, als die Definition von Reihensummen als Grenzwert der Partialsummen in Frage zu stellen. Daran ist besonders pikant, dass Padilla ja im Zuge der gleichen Argumentation den (als Summe der analytisch fortgesetzten Reihe definierten) Wert der Zetafunktion bei –1 verwendet.

Nun gibt es verschiedene Wege, divergenten unendlichen Reihen in einem verallgemeinerten Sinn eine Summe zuzuordnen (sogenannte Limitierungsverfahren), aber keines von ihnen kann auf die Summe der natürlichen Zahlen angewandt werden um einen anderen Wert als unendlich zu erhalten, und alle beruhen darauf, dass man die Folge der Partialsummen (d.h. Summen von Anfangsstücken der Reihe) nimmt und in verschiedener Weise manipuliert und danach zu einem Grenzwert übergeht. Etwas anders steht es mit einer Methode, die der indische Mathematiker Ramanujan vor etwas über 100 Jahren eingeführt hat um divergenten Reihen Zahlenwerte zuzuordnen, und die in der Tat im Fall der Reihe 1+2+3+4+… den Wert –1/12 liefert. Allerdings ist Ramanujan völlig klar, dass diese von ihm als „Wert“ der Reihe bezeichnete Zahl nicht als eine Summe aufgefasst werden kann. Die eingangs genannte Herausforderung könnte also dadurch erfüllt werden, dass man begründet, warum in der physikalischen Situation der Ramanujan-Wert der Reihe maßgeblich ist. Eine solche Begründung ist mir bei meiner (sehr bescheidenen) Literatur-Recherche nicht bekannt geworden. Günstiger steht es mit einem anderen Rechtfertigungs-Ansatz, der von einer „Glättung“ der gegebenen Reihe mit Hilfe einer sogenannten cutoff-Funktion ausgeht und dann das konstante Glied einer polynomialen Approximation der Partialsummen als „Wert“ der Reihe nimmt. Ein ernsthafter Versuch, dies mit der Physik des Casimir-Effekts in Einklang zu bringen, findet sich unter https://en.wikiversity.org/wiki/Quantum_mechanics/Casimir_effect_in_one_dimension. Wieweit das für Physiker überzeugend ist, kann ich nicht beurteilen.

https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201905071459-0

Ich fühle mich erinnert an die Erfindung der Distributionen durch Dirac, ebenfalls vor 100 Jahren. Zunächst wurde damit auch in einer Weise argumentiert, die mathematischen Ansprüchen nicht genügte, aber so erfolgreich war, dass eine mathematische Klärung zwingend notwendig erschien. Es entstand in der Folge eine leistungsfähige Theorie, die vor allen Dingen klarstellt, wann gewisse zunächst unerlaubte Operationen durchgeführt werden dürfen und wann nicht. Das ist notwendig, Willkür ist in der Mathematik (außer bei der Festlegung von Begriffen bzw. Definitionen) nicht tolerierbar. Die Physik hat es da in gewisser Weise besser, sie hat die Experimente als Kontrollinstanz. Das hat die Mathematik nicht, sie muss sich intern durch strikt geführte Beweise absichern. Ob sich das hier besprochene Problem als ähnlich fruchtbar erweisen wird wie die Theorie der Distributionen, bleibt allerdings abzuwarten.

https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201905071459-0